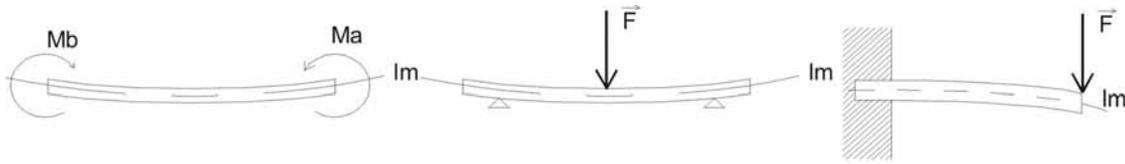


	<b>RESISTANCE DES MATERIAUX</b>	<b>CONSTRUCTION</b>
		1/6
Rèf : fle	Flexion	<b>T° STI G.E.</b>

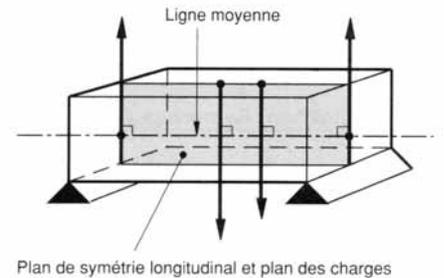
Une poutre est soumise à une sollicitation de flexion chaque fois qu'il y a fléchissement de sa ligne moyenne.



## I Hypothèse

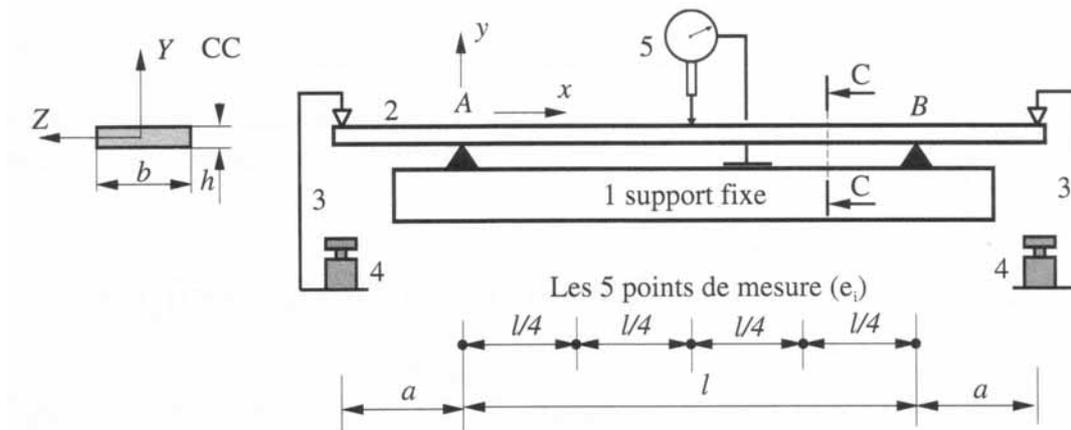
En plus des hypothèses générales de la R.D.M. valables pour toutes les sollicitations, nous en ajoutons quelques unes plus restrictives :

- toutes les poutres étudiées possèdent un plan de symétrie longitudinale
- toutes les forces appliquées sur ces poutres sont contenues dans ce plan de symétrie.
- la ligne moyenne de la poutre est rectiligne.



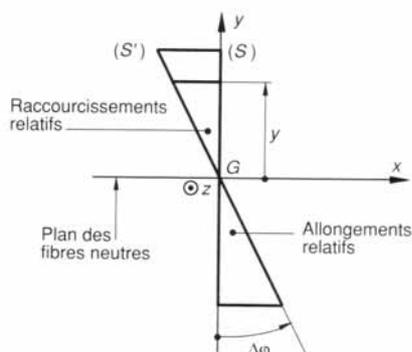
## II Etude expérimentale

Cet essai consiste à mesurer les déformations de flexion de la poutre et de l'allongement ou du raccourcissement de ces fibres.



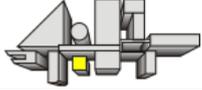
### Observations :

- la flèche est proportionnelle à  $\vec{F}$ .
- la flèche augmente quand  $\vec{F}$  se rapproche du centre.
- la flèche dépend des caractéristiques géométriques de la poutre.
- les fibres situées au dessus du plan  $G, \vec{x}, \vec{y}$  sont raccourcies.
- les fibres situées en dessous du plan  $G, \vec{x}, \vec{y}$  s'allongent.
- les fibres appartenant au plan  $G, \vec{x}, \vec{y}$  ne changent pas de longueurs, ce plan est appelé plan des fibres neutres, plan neutre ou encore axe neutre.
- les allongements ou raccourcissements sont proportionnels à l'éloignement du plan neutre.

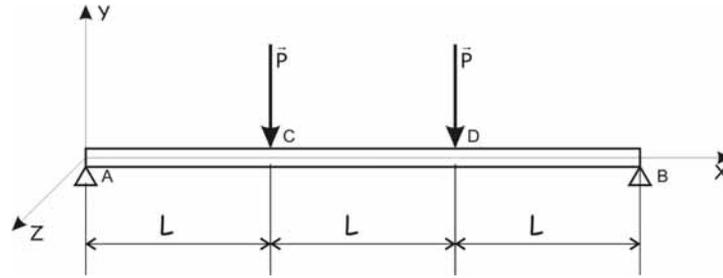


$y$  : éloignement par rapport au plan

$$\frac{\Delta L}{L} = \lambda \cdot y$$

	RESISTANCE DES MATERIAUX	CONSTRUCTION
		2/6
Réf : fle	Flexion	T° STI G.E.

### III Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants



#### 1) Etude des actions de liaisons

En A liaison pivot, en B liaison linéaire annulaire. En A et en B les actions de liaisons sont donc verticales.

Appliquons le P.F.S.  $\vec{A} + \vec{P} + \vec{P} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{P} = -\vec{A} - \vec{B} \Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{2}(-\vec{A} - \vec{B})$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -y_A & -y_B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2(y_A + y_B) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P = 1/2 \cdot (y_A + y_B)}$$

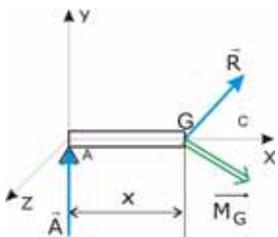
$$\vec{M}_{A(\vec{A})} + \vec{M}_{A(\vec{P})} + \vec{M}_{A(\vec{P})} + \vec{M}_{A(\vec{B})} = \vec{0}$$

$$\vec{0} + \vec{AP}_1 \wedge \vec{P} + \vec{AP}_2 \wedge \vec{P} + \vec{AB} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2L & 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & -P & 0 & y_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1P & -2.1P & -3.1y_B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1.(P + 2.P + 3.y_B) = 0 \Rightarrow \boxed{y_B = P \text{ alors } y_A = P}$$

#### 2) Etude des sollicitations internes.

Pour  $0 < x < L$

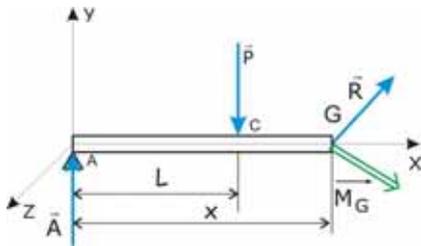


$$\vec{A} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{A} = \begin{pmatrix} N = 0 \\ y = -P \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_G + \vec{M}_{G(\vec{R})} + \vec{M}_{G(\vec{A})} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_G + \vec{GG} \wedge \vec{R} + \vec{GA} \wedge \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_G + \vec{0} + \vec{GA} \wedge \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_G = -\vec{GA} \wedge \vec{A} \Rightarrow \vec{M}_G = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_t = 0 \\ M_f_y = 0 \\ M_f_z = x.P \end{cases}$$

Pour  $L < x < 2L$



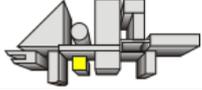
$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{A} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -P & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_G + \vec{M}_{G(\vec{R})} + \vec{M}_{G(\vec{A})} + \vec{M}_{G(\vec{P})} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_G + \vec{GG} \wedge \vec{R} + \vec{GA} \wedge \vec{A} + \vec{GP}_1 \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

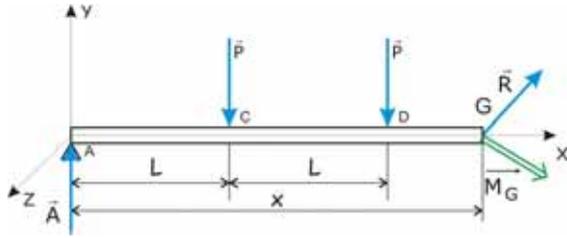
$$\Rightarrow \vec{M}_G + \vec{GG} \wedge \vec{R} + \vec{GA} \wedge \vec{A} + \vec{GP}_1 \wedge \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_G = -\vec{GA} \wedge \vec{A} - \vec{GP}_1 \wedge \vec{P} \Rightarrow \vec{M}_G = \begin{pmatrix} -x+L & 0 & -L & 0 \\ 0 & -P & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (-x+L)P & x.P & -x.P + P + x.P \end{pmatrix} = \begin{cases} M_t = 0 \\ M_f_y = 0 \\ M_f_z = P \end{cases}$$

	<b>RESISTANCE DES MATERIAUX</b>	<b>CONSTRUCTION</b>
		3/6
Rèf : fle	Flexion	<b>T° STI G.E.</b>

Pour  $2l < x < 3l$



$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = -\vec{A} - \vec{P} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P & -P & -P & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix} N = 0 \\ T_y = -P \\ F_z = 0 \end{pmatrix}$$

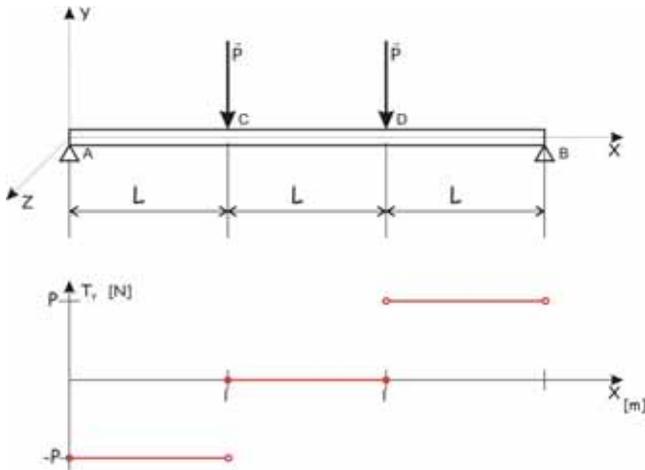
$$\vec{M}_G + \vec{M}_G(\vec{R}) + \vec{M}_G(\vec{A}) + \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_G + \vec{G}\vec{G} \wedge \vec{R} + \vec{G}\vec{A} \wedge \vec{A} + \vec{G}\vec{P}_1 \wedge \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_G = -\vec{G}\vec{A} \wedge \vec{A} - \vec{G}\vec{P}_1 \wedge \vec{P} - \vec{G}\vec{P}_1 \wedge \vec{P} \Rightarrow \vec{M}_G = \begin{pmatrix} -x+l & 0 & -x+2.l & 0 & -x & 0 \\ 0 & -P & 0 & -P & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-x+l)P & (-x+2.l)P & x.P & -x.P + l.P - x.P + 2.l.P + x.P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_t = 0 \\ M_{f_y} = 0 \\ M_{f_z} = -x.P + 3.l.P \end{pmatrix}$$

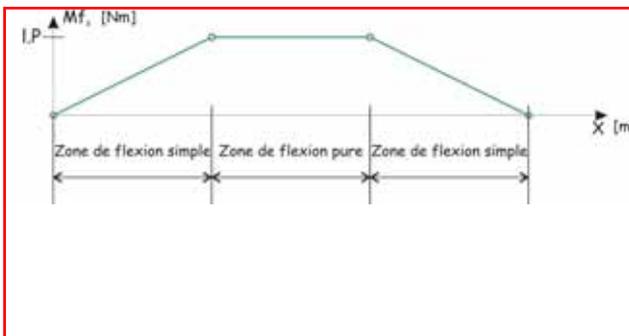
### 3) Diagramme des sollicitations internes

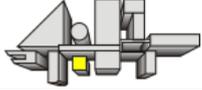


**Remarque :**

Dans une section droite,  $T_y$  et  $M_{f_z}$  sont des fonctions de l'abscisse  $x$ .

On démontre que la dérivée de la fonction  $M_{f_z}$  par rapport à  $x$  est égale à l'effort tranchant changé de signe. ou  $M_{f_z}'(x) = -T_y$ .



	RESISTANCE DES MATERIAUX	CONSTRUCTION
		4/6
Réf : fle	Flexion	T° STI G.E.

## IV Etude des répartitions des contraintes

(Dans le cas de la flexion simple)

### 1) Etude des contraintes normales $\sigma$

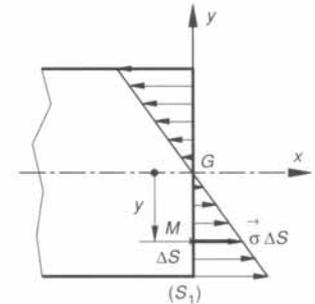
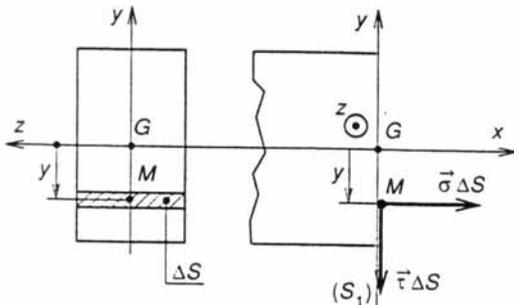
Rappel : dans le cas de la traction (compression)  $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$  avec  $\sigma > 0$  pour la traction, et  $\sigma < 0$  pour la compression.

Nous avons montré que les allongements ou les raccourcissements relatifs sont proportionnels à  $y$  :  $\frac{\Delta L}{L} = \lambda y$  ou  $\epsilon_x = \lambda y$

La loi de Hooke :  $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \Rightarrow \sigma = E \cdot \lambda \cdot y$  si  $k = E \cdot \lambda \Rightarrow \sigma = k \cdot y$ .

On en déduit la répartition des contraintes normales dans une section fléchie :

Considérons la section droite  $(S_1)$  et les contraintes  $\vec{\sigma}$  et  $\vec{\tau}$ .



$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{S_1} \vec{\sigma} \cdot \Delta S + \sum_{S_1} \vec{\tau} \cdot \Delta S \\ \vec{M}_G = \sum_{S_1} \vec{GM} \wedge \vec{\sigma} \cdot \Delta S \end{cases} \text{ mais aussi } \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{M}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mf_z \end{pmatrix}$$

On s'intéresse seulement à  $\vec{M}_G$  :

$$\vec{M}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{S_1} y \wedge \vec{\sigma} \cdot \Delta S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mf_z \end{pmatrix} \Rightarrow Mf_z = \sum_{S_1} y \cdot \sigma \cdot \Delta S \text{ on a posé précédemment } \sigma = k \cdot y \Rightarrow$$

$Mf_z = \sum_{S_1} k \cdot y^2 \cdot \Delta S$   $k$  étant invariable  $\Rightarrow Mf_z = k \cdot \sum_{S_1} y^2 \cdot \Delta S$  On peut démontrer que  $\sum_{S_1} y^2 \cdot \Delta S$  quand

$\Delta S \rightarrow 0$ ,  $\sum_{S_1} y^2 \cdot \Delta S = I_G$  moment quadratique de la surface  $S_1$ . D'où  $Mf_z = k \cdot I_G$  on sait que  $\sigma = k \cdot y \Rightarrow k = \frac{\sigma}{y}$

$$\Rightarrow Mf_z = \frac{\sigma}{y} \cdot I_G \Rightarrow \sigma = \frac{Mf_z}{I_G} \cdot y$$

$\sigma \Rightarrow$  contrainte normale en mégapascal (Mpa)

$Mf_z \Rightarrow$  moment de flexion sur l'axe  $z$  en Nm

$I_G \Rightarrow$  moment quadratique de la surface en  $m^4$

$y \Rightarrow$  distance de l'axe  $x$  au point  $M$  considéré en m

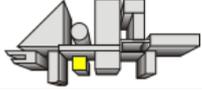
contrainte normale maximale :  $|\sigma_{\max}| = \frac{|Mf_{z\max}|}{I_G} \cdot y_{\max}$  D'autre part, on définit le rapport suivant :  $\frac{I_z}{V} = \frac{I_G}{y_{\max}}$

### 2) Etude des contraintes tangentielles

Répartition des contraintes dans la section droite :

on peut supposer, mais cela ne repose sur aucune observation que est réparti uniformément sur la section d'où :

Dans le cas général, la contrainte normale arrive beaucoup plus vite à la limite élastique que la contrainte tangentielle. Les contraintes tangentielles sont rarement déterminantes pour le calcul de la section d'une poutre.

	RESISTANCE DES MATERIAUX	CONSTRUCTION
		5/6
Réf : fle	Flexion	T° STI G.E.

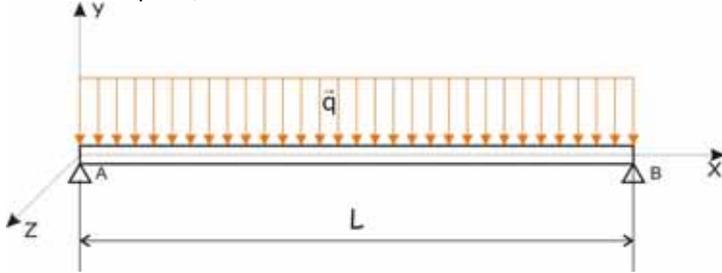
## V Cas particulier de la flexion due à une charge répartie

Dans les chapitres précédents les actions extérieures étaient concentrées et schématisées par des forces. Dans de nombreux cas (action de la pesanteur par exemple) les actions sont réparties uniformément tout au long de la poutre. Exemples : disques sur une étagère, liquide dans une cuve, terre dans une benne.

### 1) Détermination des contraintes dues au poids propre de la poutre.

On considère une poutre dont le poids linéique (poids par unité de longueur) est symbolisé par la lettre  $q$  dont l'unité est en  $Nm^{-1}$ .

En A liaison pivot, en B liaison linéaire annulaire. En A et en B les actions de liaisons sont donc verticales.



### 2) Appliquons le P.F.S.

Pour avoir l'intensité totale de la force on multiplie la valeur de la charge linéique par la longueur totale de la poutre. Et, comme l'on procède avec les forces de gravité, on transforme la charge répartie en une charge ponctuelle appliquée au centre de la longueur considérée. Le point d'application de  $\vec{P}$  est donc situé à  $L/2$ .

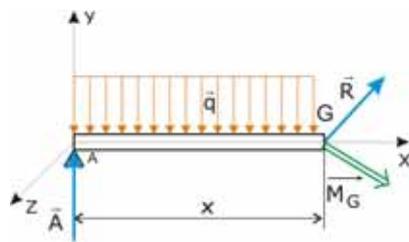
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_A & y_B & -qL \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P = 1/2 \cdot (y_A + y_B)$$

$$\vec{M}_A(\vec{A}) + \vec{M}_A(\vec{B}) + \vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$0 + \vec{AB} \wedge \vec{B} + \vec{AP} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} L & 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 \wedge y_B + 0 & \wedge -qL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L \cdot y_B & -\frac{L}{2} \cdot qL \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L \cdot y_B - \frac{qL^2}{2} = 0 \Rightarrow y_B = \frac{qL}{2} \text{ alors } y_A = \frac{qL}{2}$$

### 3) Etude des contraintes



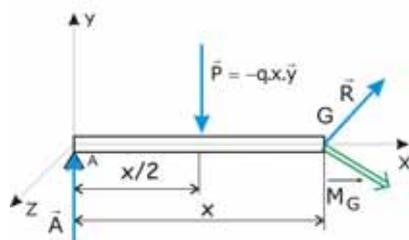
$$\vec{A} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & N \\ qL/2 & -qx & T_y \\ 0 & 0 & T_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{R} = \begin{vmatrix} N=0 \\ T_y=q(x-L/2) \\ T_z=0 \end{vmatrix}$$

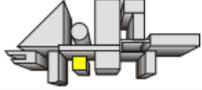
Pour simplifier le calcul du moment de la charge linéique, comme précédemment, on la transforme en une charge ponctuelle appliquée au centre du tronçon considéré.

$$\vec{M}_G(\vec{A}) + \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{R}) + \vec{M}_G = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & -x/2 & 0 \\ 0 \wedge qL/2 + 0 & \wedge -qx & Mt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & Mt & 0 \\ 0 & 0 & Mf_y & 0 \\ -x \cdot qL/2 & +qx^2/2 & Mf_z & 0 \end{vmatrix} \text{ d'où : } Mf_z = \frac{x \cdot qL}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} \cdot (L-x)$$



	RESISTANCE DES MATERIAUX	CONSTRUCTION
		6/6
Rèf : fle	Flexion	T° STI G.E.

#### 4) Diagrammes

Pour  $x=0 \Rightarrow T_y = -\frac{qL}{2}$

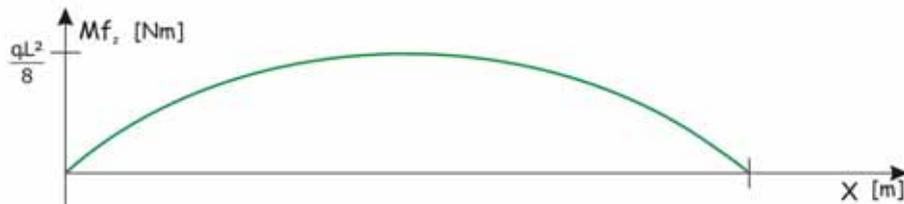
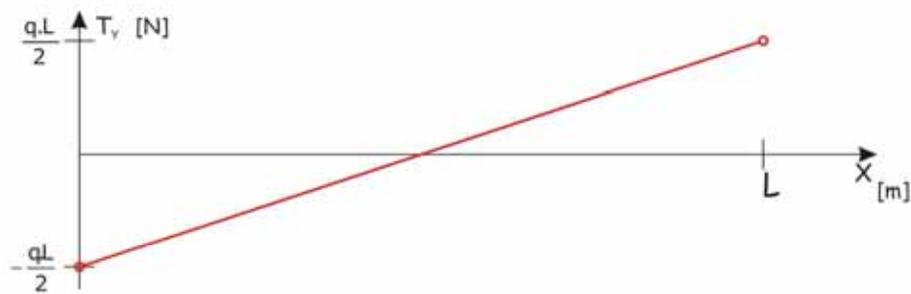
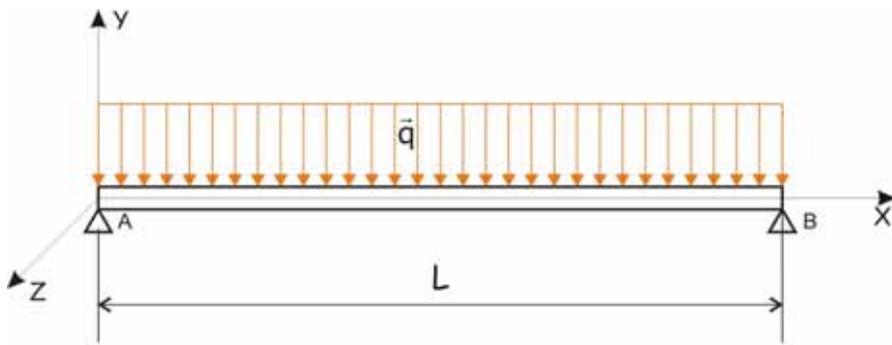
Pour  $x = \frac{L}{2} \Rightarrow T_y = q(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}) = 0$

Pour  $x=L \Rightarrow T_y = \frac{qL}{2}$

Pour  $x=0 \Rightarrow Mf_z = \frac{q \cdot 0}{2} (L - 0) = 0$

Pour  $x=L/2 \Rightarrow Mf_z = \frac{q \cdot \frac{L}{2}}{2} (L - \frac{L}{2}) = \frac{qL^2}{8}$

Pour  $x=L \Rightarrow Mf_z = \frac{qL}{2 \cdot (L-L)} = 0$



La contrainte maximale est atteinte pour  $L/2$ .

Application numérique :

Poutre IPE de 160 mm ;  $L = 4$  m ; poids linéique de la poutre  $q = 155$  N/m ;  $\frac{I_z}{v} = 109$  cm<sup>3</sup>.

$$Mf_{z\max} = \frac{155 \cdot 2}{2} \left(4 - \frac{4}{2}\right) = 310 \text{ Nm} ; \sigma_{\max} = \frac{Mf_{z\max} \cdot y_{\max}}{I_G} = \frac{Mf_{z\max}}{\frac{I_G}{y_{\max}}} = \frac{Mf_{z\max}}{\frac{I_z}{v}} = \frac{310000}{109000} = 2.84 \text{ N/mm}^2$$